УРОК 6

Тема уроку: Найбільше і найменше значення функції

Підручник з математики для 10-ого класу § 3 п.24

Перевірка домашнього завдання

23.4. 1) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 3) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -7$; 4) $x_{\min} = \frac{3}{2}$.

23.8. 1) Зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$; 2) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$.

Щоб переконатись у засвоєнні даної теми виконайте самостійно завдання:

Задача 1. Знайдіть точки екстремуму функції: $f\ (x)\ =\ 2x^3 - 3x^{\ 2} - 12x$.

Задача 2. Знайдіть точки екстремуму функції: $f\ (x)\ =\ 2x^2 - x^{\ 4}$.

Задача 3. Знайдіть точки екстремуму функції: $f\ (x)\ = \frac{x^2-x+4}{x-1}$.

Самостійно виконайте перевірку виконання даних задач, пройшовши за посиланням: http://surl.li/crysn .

Пояснення нового матеріалу

Неперервна на відрізку $[a;\ b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму.

Зважаючи на це, для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку $[a;\ b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції f, які належать проміжку $[a;\ b]$.
2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.
3. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a;\ b]$.

Якщо визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких треба шукати значення функції, можна зменшити. Проте щоб виявити точки екстремуму, зазвичай потрібна більша технічна робота, ніж для обчислення значень функції в критичних точках.

Задача 1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f\ (x)\ = 4x^{\ 3} - 9x^2 - 12x\ +\ 6$ на відрізку $[-2;\ 0]$.

Розв'язання.

1. Знайдемо критичні точки, для цього похідну прирівняємо до нуля і розв'яжемо рівняння:
   $f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$

   $12x^2 - 18x - 12 = 0;\ |:6$
   $2x^2 - 3x - 2 = 0;$

   $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 + 16 = 25;$

   $x_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ або $x_2 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2.$

   Таким чином, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2;\ 0]$ належить одна: $x\ =\ -\frac{1}{2}$

2. Обчислюємо значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.

   $$f\ \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot (-\ \frac{1}{2})^3 - 9 \cdot \left(-\ \frac{1}{2}\right)^2 - 12 \cdot \left(-\ \frac{1}{2}\right) + 6$$
   $$= -\frac{4}{8} - \frac{9}{4} + \frac{12}{2} + 6 = -\frac{2}{4} - \frac{9}{4} + 6 + 6 = -\frac{11}{4} + 12$$
   $$= -2\frac{3}{4} + 11\frac{4}{4} = 9\frac{1}{4}$$

   $$f\ (-2) = 4 \cdot (-\ 2)^3 - 9 \cdot (-\ 2)^2 - 12 \cdot (-\ 2) + 6$$
   $$= 4 \cdot (-8) - 9 \cdot 4 + 24 + 6 = -32 - 36 + 24 + 6 = -38$$

   $$f\ (-0) = 4 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 6 = 6$$

3. Отже, $\max\limits_{[-2;\ 0]} f(x) = f\ \left(-\frac{1}{2}\right) = 9\frac{1}{4}$

   $\min\limits_{[-2;\ 0]} f(x) = f\ (-2) = -38$

Відповідь: $9\frac{1}{4}; -38.$

Задача 2. Подайте число 8 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб сума куба першого числа та квадрата другого була найменшою.

Розв'язання.

Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює $(8 - x)$.

З умови випливає, що $0 \le x \le 8$.

Розглянемо функцію $f\ (x) = x^3 + (8 - x)^2$, визначену на відрізку $[0;\ 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 - 16 + 2x = 3x^2 + 2x - 16$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$3x^2 + 2x - 16 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196;$

$x_1 = \frac{-2-14}{2\cdot3} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$ або $x_2 = \frac{-2+14}{2\cdot3} = \frac{12}{6} = 2$

Серед знайдених чисел відрізку $[0;\ 8]$ належить тільки число 2.

Отримуємо: $f\ (2) = 2^3 + (8 - 2)^2 = 8 + 36 = 44$

$f\ (0) = 0^3 + (8 - 0)^2 = 64$

$f\ (8) = 8^3 + (8 - 8)^2 = 512 + 0 = 512$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: 8 = 2 + 6.

Домашнє завдання: опрацювати § 3 п.24 та виконати за поданими вище зразками № 24.2 та № 24.3.